

Cinemática e Dinâmica de Engrenagens

4. Engrenagens Cóni- cas

**Paulo Flores
José Gomes**



Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Guimarães 2015

ÍNDICE

4. Engrenagens Cónicas	1
4.1. Introdução.....	1
4.2. Geração do Dente	3
4.3. Nomenclatura	9
4.4. Traçado Aproximado de Tredgold	11
4.5. Relações Geométricas	14
4.6. Parâmetros de Desempenho	20
4.7. Hipoides.....	23
4.8. Revisão de Conhecimentos	25
4.9. Referências Bibliográficas	27

4. ENGRENAGENS CÔNICAS

4.1. INTRODUÇÃO

Em geral, as engrenagens cônicas são utilizadas nas situações em que os eixos das rodas motora e movida são concorrentes¹ (Wilson e Sadler, 1993). As engrenagens cônicas podem ter dentes retos, helicoidais e espirais ou curvos, podendo ainda apresentar eixos descentrados² (hipoides). A figura 4.1 ilustra os principais tipos de engrenagens cônicas (Flores e Gomes, 2014a).

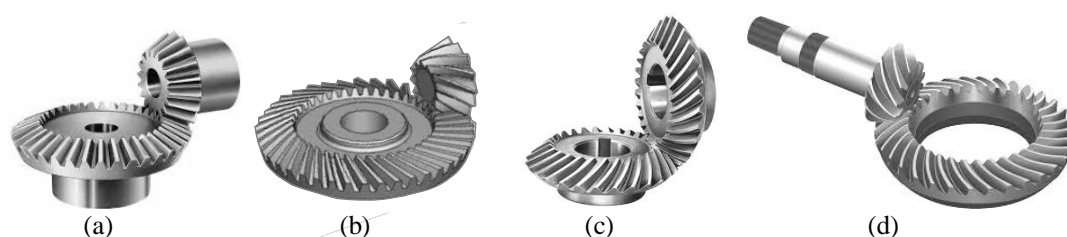


Figura 4.1 – (a) Engrenagem cônica de dentes retos; (b) Engrenagem cônica de dentes helicoidais; (c) Engrenagem cônica de dentes espirais; (d) Hipoide.

As engrenagens cônicas de dentado reto apresentam elementos cônicos com a mesma direção da geratriz do cone primitivo. Este tipo de dentado é mais simples e mais frequentemente utilizado de entre os diversos tipos de dentes. As engrenagens cônicas de dentes retos são das mais ruidosas. Por seu lado, as engrenagens cônicas de dentes inclinados ou helicoidais apresentam um ângulo de inclinação da hélice e são utilizados principalmente para transmissão de movimento entre eixos que fazem entre si um ângulo de 90° . As engrenagens cônicas de dentes em espiral apresentam os dentes curvos, são mais suaves e menos ruidosas e apresentam maior capacidade de carga em virtude da maior área de contacto que proporcionam. Este tipo de dente é mais difícil de produzir quando comparado com o dentado reto. Finalmente, as hipoides são semelhantes às engrenagens cônicas de dentes espirais e encontram como uma das principais aplicações as unidades diferenciais de veículos pesados. Nas hipoides, os eixos das rodas estão descentrados. Este tipo de engrenagem é das mais silenciosas e apresenta uma excelente capacidade de carga devido à maior área de contacto entre os flancos dos dentes. Contudo, as hipoides apresentam rendimentos mais baixos, geram maior quantidade de calor e requerem, por isso, lubrificantes especiais, vulgo, lubrificantes de elevada viscosidade (Henriot, 1979; Shigley e Uicker, 1980; Mabie e Reinholtz 1987; Drago, 1988; Branco *et al.*, 2009).

Nas engrenagens cônicas as relações de transmissão são, em geral, mais baixas do que nas engrenagens cilíndricas, podendo atingir, no máximo valores da ordem de 6:1. Na maioria dos casos, as engrenagens cônicas funcionam em transmissões cujos eixos de rotação fazem entre si um ângulo de 90° . Embora não seja tão frequente, há

¹ As engrenagens cônicas são frequentemente denominadas de engrenagens concorrentes, pelo facto de os eixos das rodas se intersectarem.

² Refira-se que nas engrenagens cônicas descentradas ou hipoides o desalinhamento deve ser o menor possível de modo a minimizar as perdas por atrito e aquecimento (Niemann, 1971).

também situações práticas em que os eixos das rodas apresentam um ângulo inferior ou superior a 90° (Niemann, 1971). Para que haja engrenamento entre duas rodas cónicas, os seus eixos devem interseçar-se no mesmo vértice³, independentemente do tipo de dente e do ângulo que os eixos formam (Henriot, 1979; Shigley e Mischke, 1989). À semelhança das engrenagens cilíndricas, as engrenagens cónicas podem ser exteriores ou interiores (Flores e Gomes, 2014a).

O diferencial dos automóveis é indubitavelmente o mais popular e conhecido exemplo de aplicação de engrenagens cónicas, tal como o que se ilustra na figura 4.2. De um modo simples pode definir-se diferencial como sendo uma associação de rodas dentadas que possibilita que as rodas motoras dos automóveis rodem com velocidades angulares distintas, independentemente da direção do movimento do automóvel⁴ (Branco *et al.*, 2009; Paz, 2011).



Figura 4.2 – Diferencial de um automóvel.

A título de curiosidade refira-se que os principais processos de fabrico de rodas cónicas são a maquinagem e a fundição⁵. A maquinagem (*e.g.* fresagem) permite a obtenção de dentes com a geometria correta. Por seu lado, a fundição é utilizada apenas em aplicações que, por um lado, operam a velocidades relativamente baixas e, por outro, toleram ruído e vibrações (Branco *et al.*, 2009)

³ É evidente que a hipoide é uma exceção a esta regra, pois, por definição, neste tipo de engrenagem os eixos são descentrados.

⁴ O diferencial automóvel não será estudado no âmbito do presente documento. Para o efeito, o leitor deverá consultar a literatura da especialidade, nomeadamente a que se refere ao estudo de trens de engrenagens (Mabie e Reinholtz 1987).

⁵ Para determinadas situações também se produzem rodas dentadas cónicas por injeção de moldes, prototipagem rápida e impressão 3D (Antunes, 2012).

4.2. GERAÇÃO DO DENTE

Nas engrenagens cónicas ou concorrentes, tal como o nome sugere, as superfícies primitivas têm a forma cónica e rolam sem escorregar uma em relação à outra. As superfícies primitivas nas engrenagens cónicas são frequentemente denominadas de cones primitivos, tal como os que se mostram na figura 4.3 (Shigley e Uicker, 1980). Para que duas rodas cónicas funcionem corretamente, os seus eixos devem cruzar-se no mesmo vértice, o ponto S representado na figura 4.3. O passo primitivo dos dentes depende da distância radial ao centro S . Durante o movimento relativo de duas rodas cónicas, o qual é teoricamente do tipo esférico, cada ponto da engrenagem permanece à mesma distância do vértice S (Shigley e Mischke, 1989).

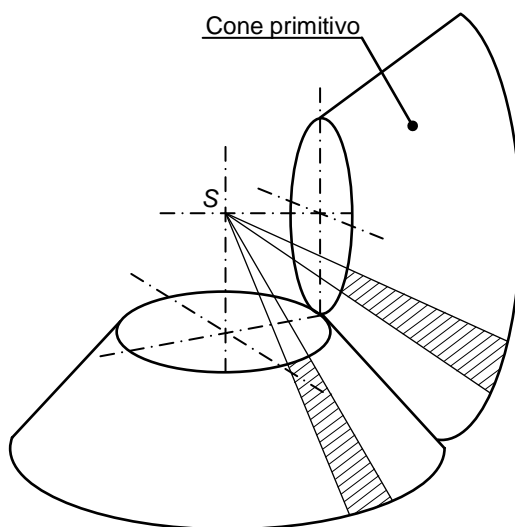


Figura 4.3 – Representação dos cones primitivos de uma engrenagem cónica.

A geração do perfil dos dentes das rodas cónicas pode ser levada a cabo considerando o método em evolvente. Tal como no caso das engrenagens cilíndricas, também nas engrenagens cónicas os perfis dos dentes podem ser definidos pelo traçado em evolvente. Nas primeiras considera-se uma circunferência de base, obtendo-se uma evolvente cilíndrica, enquanto nas segundas se utiliza um cone de base, resultando, deste modo, uma evolvente esférica. A evolvente esférica exata⁶ pode obter-se pelo rolamento puro de um círculo gerador sobre o cone de base. O círculo gerador é concêntrico e tangente ao cone de base, como se esquematiza na figura 4.4. O arco PP' representa parte da evolvente esférica exata que resulta da trajetória descrita pelo ponto P pertencente à linha geratriz do elemento gerador, quando este último rola sem escorregar sobre o cone de base (Wang *et al.*, 2011).

As engrenagens cónicas em evolvente esférica têm relativamente pouco interesse prático em virtude da dificuldade em obter rodas com o perfil exato (Shigley e Uicker, 1980; Mabie e Reinholtz, 1987). Na verdade, os perfis dos dentes assim obtidos apresentam um flanco curvo com um ponto de inflexão, tal como se pode visualizar na figura 4.5a. Por isso, na prática prefere-se o perfil piramidal ou trapezoidal para a forma dos dentes das engrenagens cónicas, em detrimento do perfil exato. A figura 4.5b diz respeito ao perfil piramidal ou trapezoidal (Niemann, 1971).

⁶ O termo exata é aqui utilizado para dar ênfase à evolvente esférica teórica, a qual é distinta da evolvente real. A evolvente real é uma aproximação à evolvente teórica ou exata.

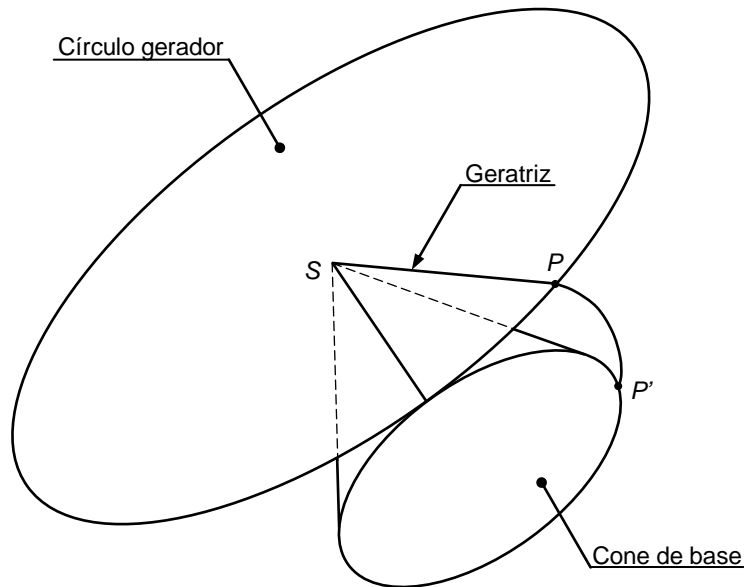


Figura 4.4 – Evolvente esférica exata em engrenagens cônicas.

Na figura 4.6 representa-se uma secção de uma engrenagem cônica quando esta é intersectada por uma superfície esférica cujo centro é coincidente com o vértice virtual dos eixos das rodas. Os perfis dos dentes que se obtêm deste modo correspondem aos perfis exatos dos dentes. Daqui pode inferir-se que o perfil dos dentes aumenta com o aumento da superfície esférica considerada (Shigley e Uicker, 1980). Do que acaba de ser exposto, pode observar-se que nas rodas cônicas a geometria de contacto deve ser examinada numa superfície esférica e não numa superfície plana como acontece, por exemplo, no caso das engrenagens cilíndricas de dentes retos⁷ (Henriot, 1979; Flores e Gomes, 2014b).

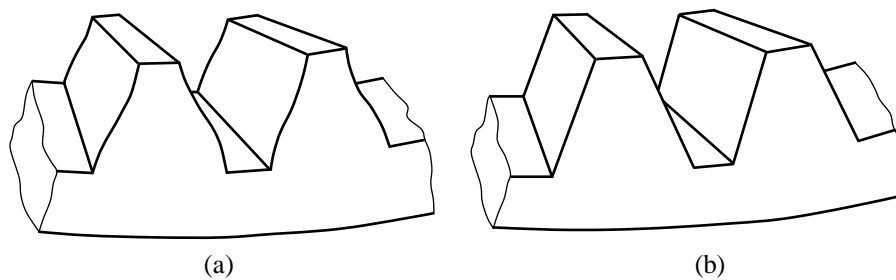


Figura 4.5 – Perfis de dentes de rodas cônicas; (a) Perfil exato; (b) Perfil aproximado.

A figura 4.7 diz respeito ao engrenamento de duas rodas cônicas em que a forma dos dentes não é gerada em evolvente esférica. Na verdade, neste engrenamento existe um pequeno desvio em relação ao perfil exato, em virtude das superfícies dos dentes serem constituídas por faces planas. Como consequência, a linha de ação⁸ ou de engrenamento apresenta a forma de oito, sendo, por isso, o perfil denominado de octoide (Niemann, 1971). O engrenamento octoide corresponde ao desenvolvimento

⁷ Uma engrenagem cilíndrica de dentes retos pode ser vista como um caso particular de uma engrenagem cônica em que o raio da esfera tem um valor infinito, traduzindo-se num plano onde se pode estudar a interação entre os dentes (Shigley e Uicker, 1980).

⁸ Na verdade, apenas parte da linha de ação é utilizada durante o engrenamento, isto é, a parte que é aproximada de trajetória reta (Flores e Claro, 2007).

dos dentes em evolvente tal como acontece nas engrenagens cilíndricas. Deve ser referido que neste tipo de perfil de dente se considera uma roda coroa⁹, a qual apresenta uma relação semelhante à cremalheira no caso das engrenagens cilíndricas. Neste tipo de engrenamento, roda coroa roda cónica, as faces dos dentes são planas que cruzam com o centro da esfera teórica, como se mostra na figura 4.7b. A figura 4.8 diz respeito ao engrenamento de rodas cónicas em que uma das rodas é do tipo coroa (Flores e Gomes, 2014a).

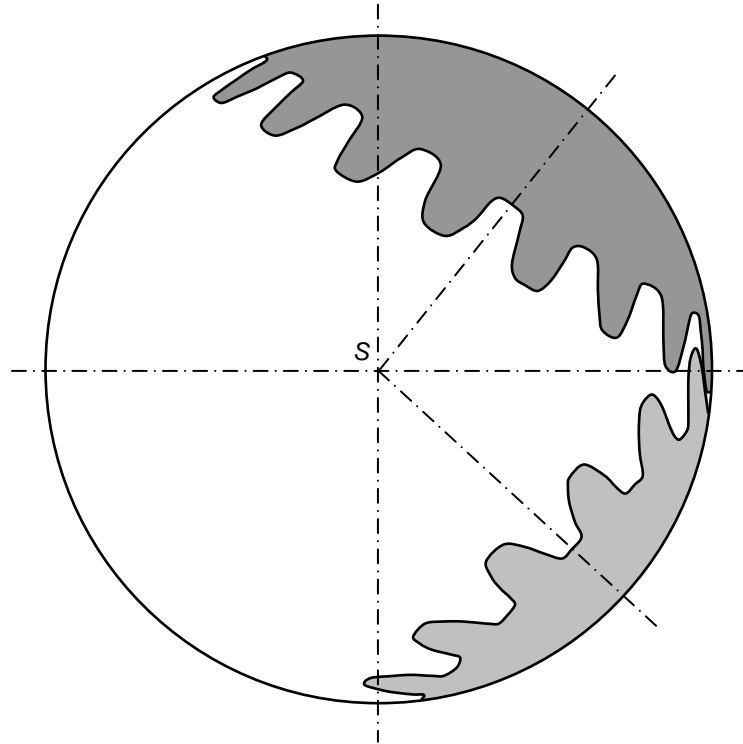


Figura 4.6 – Secção esférica de uma engrenagem cónica.

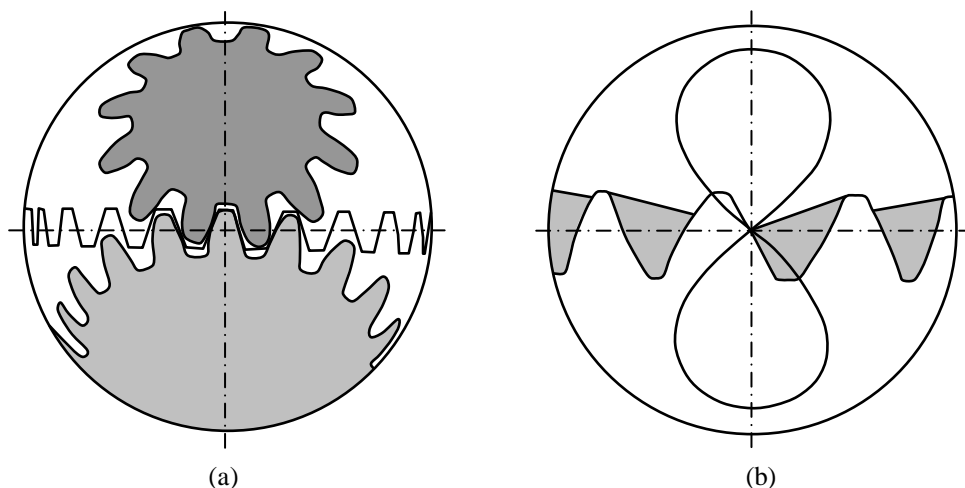


Figura 4.7 – Engrenamento de duas rodas cónicas.

⁹ A roda coroa pode ser considerada como um caso particular de uma roda cónica em que os dentes se desenvolvem paralelamente ao eixo da roda. Este tipo de roda funciona com rodas similares às cónicas e, em alguns casos, com rodas cilíndricas. A roda coroa encontra aplicação em relógios mecânicos como mecanismo de escape (Flores e Claro, 2007).

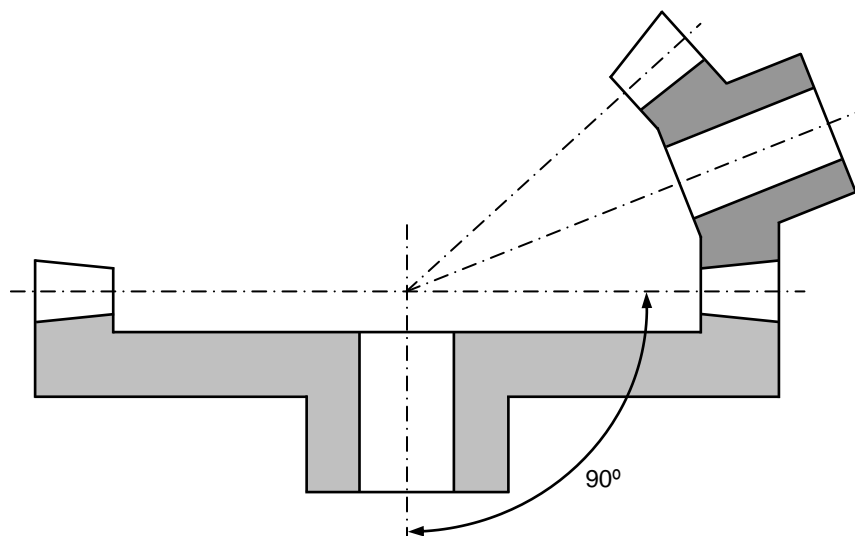


Figura 4.8 – Engrenamento de duas rodas cónicas, sendo uma das rodas do tipo coroa.

Tal como se referiu anteriormente, as engrenagens cónicas ou concorrentes podem apresentar dentes com formas diversas, tais como dentes retos, dentes helicoidais e dentes espirais (Henriot, 1979; Budynas e Nisbett, 2011). A figura 4.9a diz respeito à representação simplificada¹⁰ de uma engrenagem cónica de dentado reto. Neste caso particular, pode observar-se que os dentes das rodas motora e movida concorrem no vértice S dos cones primitivos.

Refira-se de novo que devido às inerentes dificuldades de talhe, as rodas cónicas de dentado reto apresentam dentes piramidais, sendo, por isso, planas as faces dos dentes¹¹ (Drago, 1988). Na figura 4.9b ilustram-se as diferenças entre o dentado em evolvente esférica e dentado piramidal para o caso das engrenagens cónicas de dentes retos (Niemann, 1971).

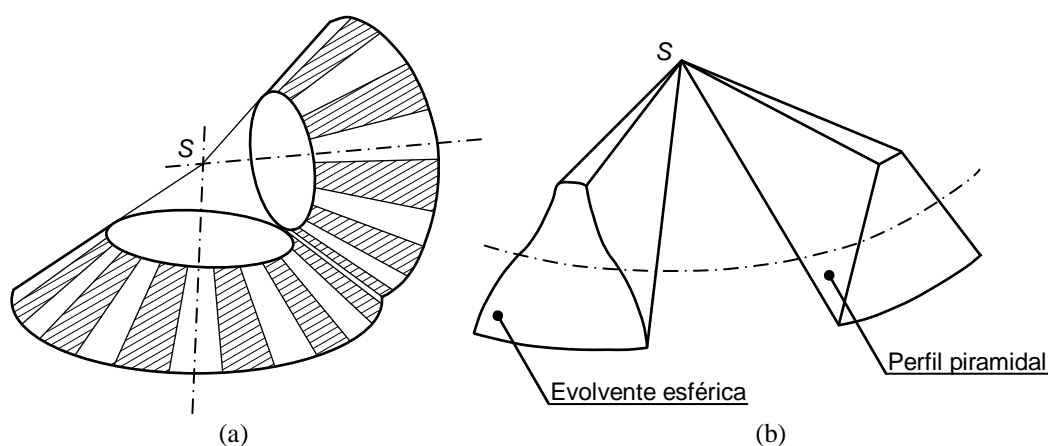


Figura 4.9 – (a) Representação simplificada de uma engrenagem cónica de dentes retos; (b) Dentado em evolvente esférica e dentado piramidal.

¹⁰ Por simplicidade, no presente texto apenas se representam os cones primitivos das rodas motora e movida, sendo que os dentes estão materializados pela intersecção dos próprios dentes com os cones primitivos (Henriot, 1979; Niemann, 1971).

¹¹ Na prática, na linha de engrenamento não existem grandes diferenças entre os dentados em evolvente esférica e piramidal, pelo que é de todo conveniente adotar este último caso para o dentado reto em engrenagens cónicas.

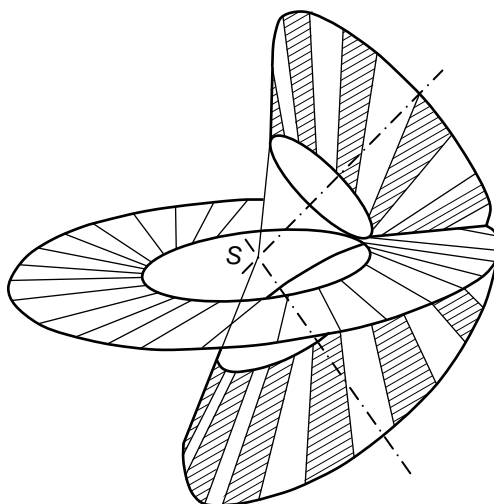


Figura 4.10 – Engrenagem cônica de dentado helicoidal.

Na figura 4.10 representa-se, de modo simplificado, uma engrenagem cônica de dentes helicoidais. Pelas razões acima expostas, também neste tipo de engrenagem se prefere o dentado piramidal em detrimento do dentado em evolvente esférica. Deve notar-se que neste caso as superfícies dos dentes não concorrem para o mesmo vértice virtual dos cones primitivos. A figura 4.11 ilustra perfis de dentes em evolvente esférica e piramidal desenvolvidos para o caso de engrenagens cônicas de dentes inclinados ou helicoidais (Henriot, 1979).

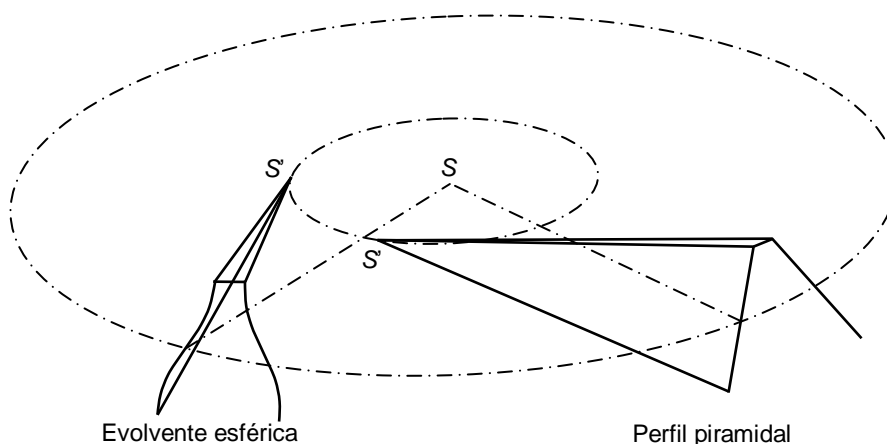


Figura 4.11 – Dentado em evolvente esférica e piramidal para o caso de engrenagens cônicas de dentado helicoidal.

A figura 4.12 mostra uma engrenagem cônica de dentes espirais ou curvos (Niemann, 1971; Henriot, 1979).

Deve referir-se que as engrenagens cônicas são, por vezes, denominadas como engrenagens esféricas ou concorrentes. A primeira designação não é de todo a mais adequada em virtude do traçado aproximado de Tredgold transformar o engrenamento esférico num engrenamento cônico. A segunda designação é mais apropriada, uma vez que, em geral, os eixos das rodas podem interseccionar-se. Deve ainda salientar-se que as rodas cônicas são feitas aos pares, constituindo engrenagens em que as rodas não são intermutáveis. À semelhança das engrenagens cilíndricas, nas engrenagens cônicas o valor normalizado para o ângulo de pressão é de 20° . Geralmente, as rodas cônicas têm 13 ou mais dentes (Juvinall e Marshek, 2006).

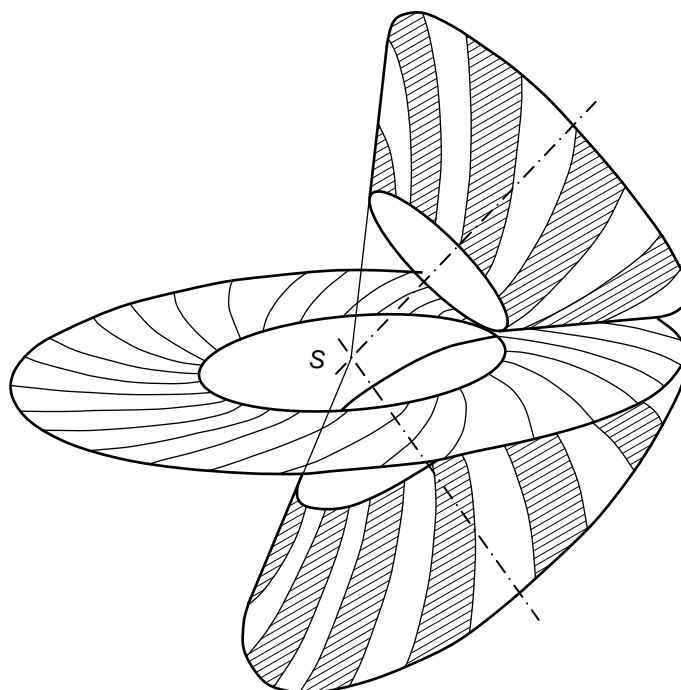


Figura 4.12 – Engrenagem cônica de dentes espirais.

4.3. NOMENCLATURA

Nesta secção é introduzida a nomenclatura fundamental associada às engrenagens cónicas. Para o efeito, considere-se a figura 4.13 em que se representam os principais parâmetros geométricos e termos utilizados na caracterização de uma engrenagem cónica (Branco *et al.*, 2009).

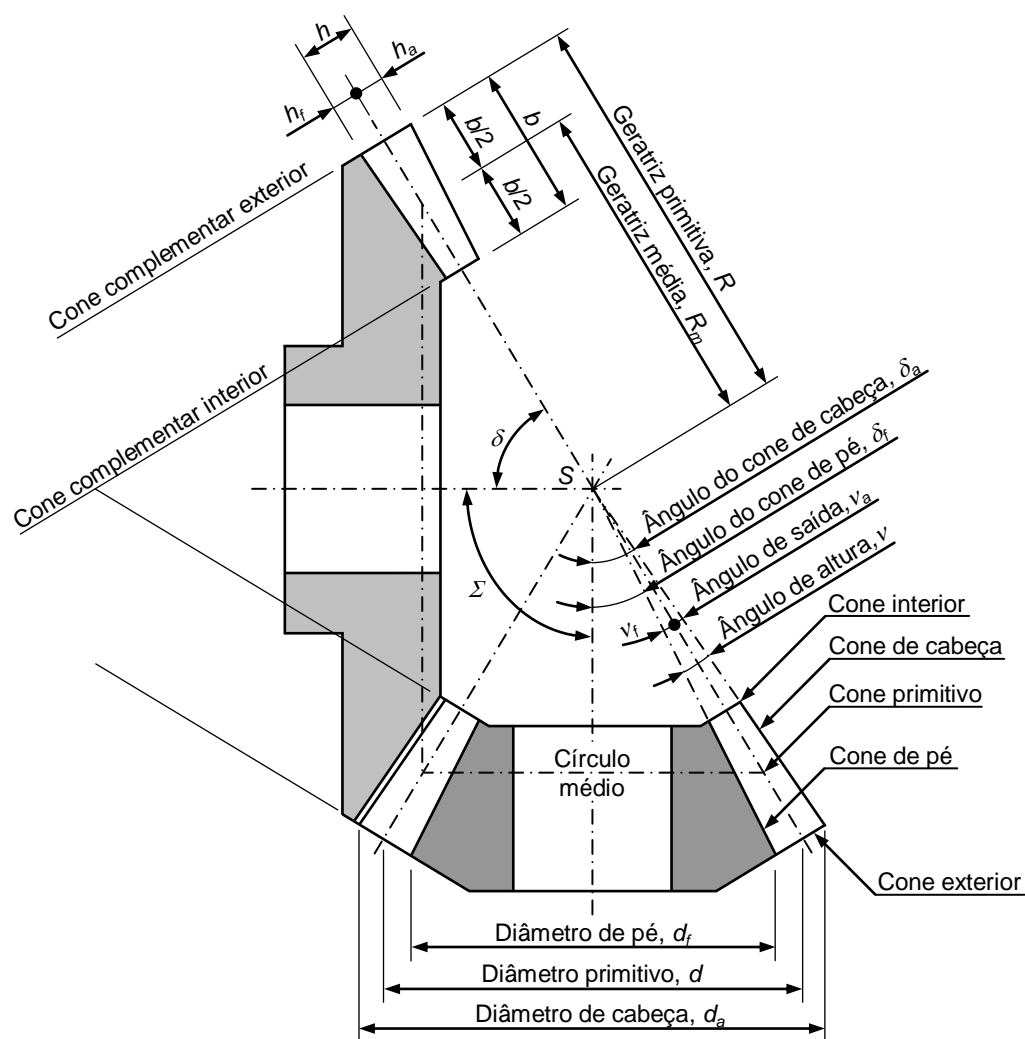


Figura 4.13 – Nomenclatura fundamental de uma engrenagem cónica.

A nomenclatura referente às engrenagens cónicas é em tudo semelhante à das engrenagens cilíndricas uma vez que se utiliza um grande número de termos iguais num e noutro caso. Há, todavia, uma série de parâmetros e termos que merecem ser realçados, nomeadamente (Branco *et al.*, 2009):

- Σ – ângulo entre os eixos ou ângulo de conicidade,
- δ – ângulo de cone primitivo,
- δ' – ângulo de cone das rodas complementares,
- δ_a – ângulo de cone de cabeça ou coroa,
- δ_f – ângulo de cone de pé ou raiz,
- ν – ângulo de altura do dente,
- ν_a – ângulo de cabeça do dente ou de saliência,

ν_f – ângulo de pé do dente ou raiz,
 d – diâmetro primitivo,
 d_a – diâmetro de cabeça ou coroa,
 d_f – diâmetro de pé ou raiz,
 h – altura do dentado,
 h_a – altura de cabeça do dente ou saliência,
 h_f – altura de pé do dente ou reentrância,
 R – geratriz primitiva,
 R_m – geratriz média,
 b – largura do dentado,
 m – módulo exterior da engrenagem cônica ou módulo da engrenagem complementar ou equivalente.

Deve desde já referir-se que no caso das rodas cônicas, o passo é definido na extremidade exterior do dentado sobre os cones primitivos. Com efeito, o estabelecimento das relações matemáticas entre o módulo, o passo, o número de dentes e os diâmetros primitivos são as mesmas que se consideram para as engrenagens cilíndricas, ou seja, (Flores e Gomes, 2014b),

$$d_1 = mz_1 \quad (4.1)$$

$$d_2 = mz_2 \quad (4.2)$$

$$p = m\pi \quad (4.3)$$

No atinente às proporções dos dentes, consideram-se as mesmas que no caso das engrenagens cilíndricas, ou seja (Flores e Gomes, 2014b),

$$h_a = m \quad (4.4)$$

$$h_f = 1,25m \quad (4.5)$$

$$h = 2,25m \quad (4.6)$$

4.4. TRAÇADO APROXIMADO DE TREDGOLD

Tal como foi mencionado anteriormente, nas engrenagens cónicas a geometria de contacto é desenvolvida numa superfície esférica. Este facto torna a geração dos perfis dos dentes impraticável uma vez que é impossível planificar uma superfície esférica. O denominado traçado aproximado de Tredgold¹² é um método simplificado que permite ultrapassar a referida limitação. Na verdade, com este método os perfis dos dentes são traçados não em superfícies esféricas, mas sim em superfícies cónicas. Estas últimas apresentam a vantagem de possibilitar a sua planificação (Henriot, 1979; Juvinall e Marshek, 2006). A figura 4.14 ilustra os cones *A* e *B* tangentes à superfície esférica dos segmentos primitivos das rodas. Os cones são depois desenrolados na superfície plana sendo os dentes das rodas gerados precisamente do mesmo modo que no caso das engrenagens cilíndricas (Flores e Gomes 2014a).

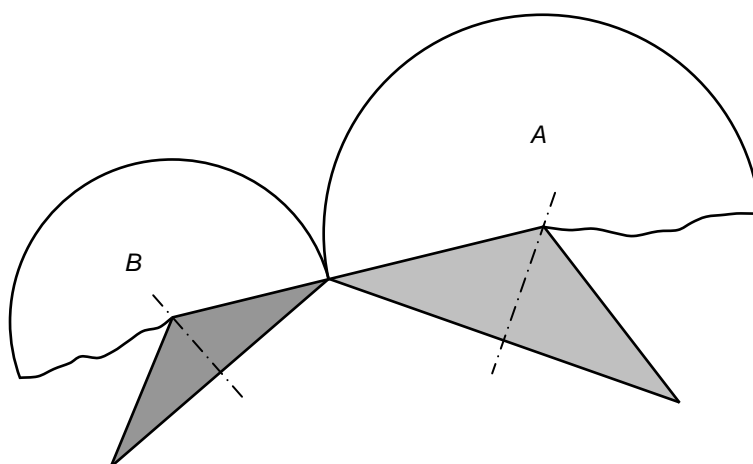


Figura 4.14 – Traçado aproximado de Tredgold.

O traçado de Tredgold é um método aproximado¹³, cujo erro é difícil de quantificar. Contudo, os perfis obtidos pelo traçado de Tredgold devem ser odontoides¹⁴ conjugados e, deste modo garantir constância na relação de transmissão (Flores e Gomes, 2014a). De um modo simples pode dizer-se que o traçado de Tredgold se baseia no facto de um cone tangente a uma esfera, no ponto primitivo de uma engrenagem cónica, apresentar uma superfície muito próxima da de uma esfera, quando aquela está na vizinhança do ponto primitivo (Niemann, 1971). A figura 4.15a ilustra esta ideia fundamental. O cone referido é denominado de cone complementar e pode ser planificado. Assim, o perfil dos dentes de rodas cónicas, quando definido na parte de trás do cone ou cone complementar, é idêntico ao que se obtém para uma roda cilíndrica com um diâmetro primitivo equivalente, tal como se representa na figura 4.15b. Com efeito, uma vez determinado o número de dentes equivalente, a análise do desempenho de uma engrenagem cónica é em tudo semelhante à de uma engrenagem cilíndrica equivalente (Henriot, 1979; Spotts e Shoup, 1998; Hamrock *et al.*, 2005; Juvinall e Marshek, 2006; Budynas e Nisbett, 2011).

¹² O método aproximado de Tredgold foi proposto pelo engenheiro britânico Thomas Tredgold em 1822, tendo sido adotado desde então até aos nossos dias (Crosher, 2014).

¹³ Na verdade, este método é suficientemente exato desde que a engrenagem cónica contenha rodas com 8 ou mais dentes. Em geral, as rodas cónicas devem ter pelo menos 13 dentes.

¹⁴ Odontoide diz respeito a algo que apresenta a forma de dente.

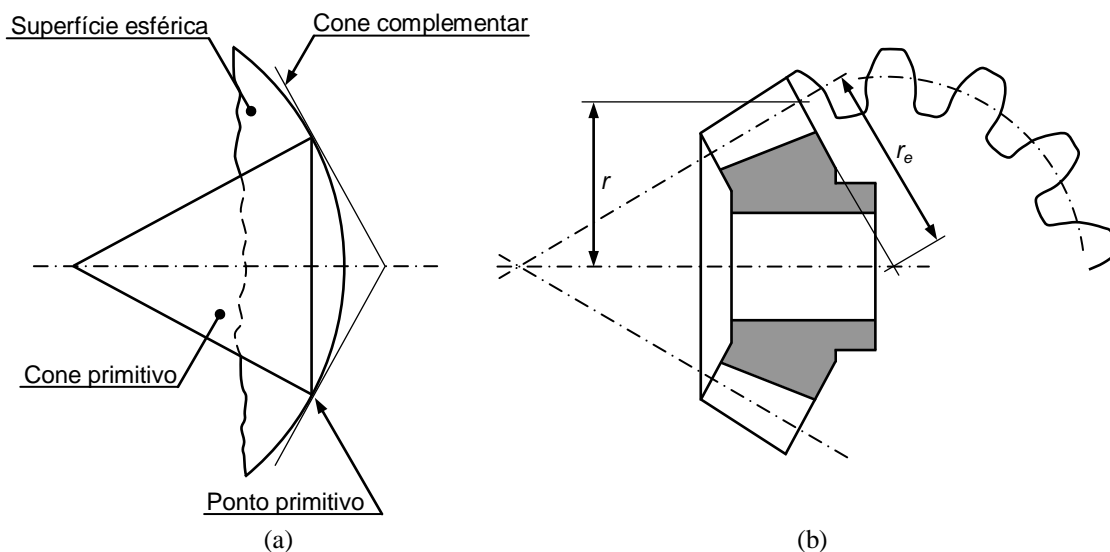


Figura 4.15 – (a) Representação do traçado aproximado de Tredgold; (b) Representação da roda cilíndrica equivalente a uma roda cônica.

A figura 4.16 ilustra uma engrenagem cônica e a correspondente engrenagem cilíndrica equivalente formada a partir dos respectivos cones complementares. A engrenagem equivalente é construída a partir dos raios equivalentes representados na figura 4.16. Os raios equivalentes correspondem à geratriz dos cones complementares.

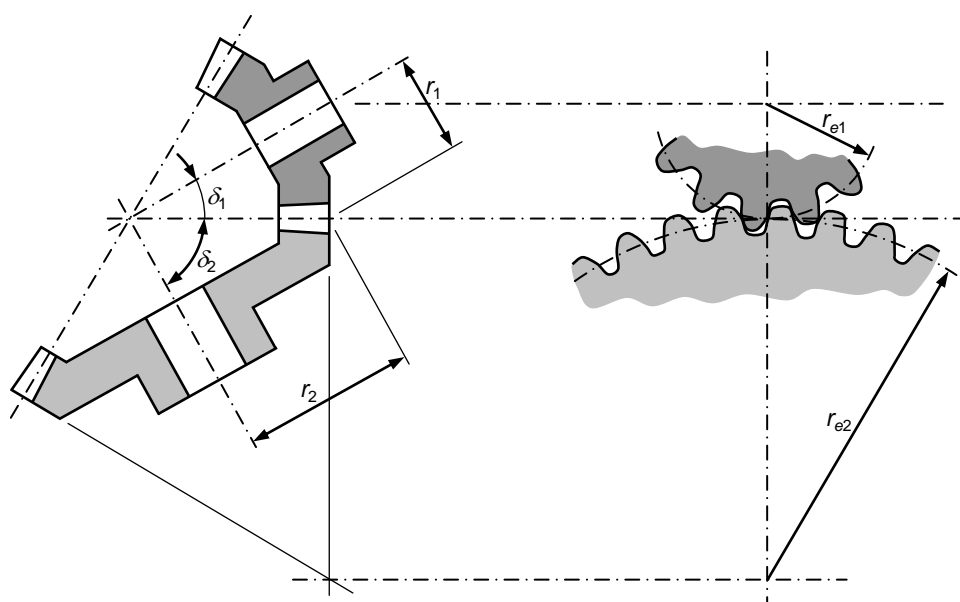


Figura 4.16 – Engrenagem cônica e engrenagem cilíndrica equivalente.

Da análise da figura 4.16 observa-se que os raios equivalentes são dados por

$$r_{e1} = \frac{r_1}{\cos \delta_1} \quad (4.7)$$

$$r_{e2} = \frac{r_2}{\cos \delta_2} \quad (4.8)$$

sendo r_1 e r_2 os raios primitivos das rodas cônicas e δ_1 e δ_2 os ângulos primitivos.

Por seu lado, o número de dentes das rodas cilíndricas equivalentes pode ser determinado recorrendo às seguintes relações (Shigley e Uicker, 1980; Norton, 2013),

$$z_{e1} = \frac{z_1}{\cos \delta_1} \quad (4.9)$$

$$z_{e2} = \frac{z_2}{\cos \delta_2} \quad (4.10)$$

Da análise das equações (4.9) e (4.10) verifica-se que o número de dentes equivalente não é, necessariamente, um número inteiro. Uma vez que o número de dentes equivalente é sempre superior ao número de dentes real, uma engrenagem cónica apresenta um funcionamento mais suave do que uma engrenagem cilíndrica com o mesmo número de dentes. Tal facto, decorre da existência de maiores comprimentos de condução. Deve ainda salientar-se que a engrenagem cónica e a engrenagem cilíndrica equivalente apresentam o mesmo módulo (Henriot, 1979). Com efeito, o estudo dos parâmetros de desempenho de uma engrenagem cónica pode ser levada a cabo considerando a análise da engrenagem cilíndrica equivalente, virtual ou imaginária, em que o número de dentes é dado pelas expressões (4.9) e (4.10).

Exercício 4.1

Enunciado: Considere uma engrenagem cónica exterior de dentado reto cujo ângulo primitivo do pinhão é igual a $18,43^\circ$. O ângulo de conicidade das rodas é igual 90° . Atendendo a que o pinhão e a roda têm, respetivamente, 16 e 48 dentes, determine o número de dentes formativo da engrenagem cilíndrica equivalente.

Padrão de resposta esperado:

Sabendo que a soma dos ângulos primitivos das rodas é igual a 90° e que o ângulo primitivo do pinhão é de $18,43^\circ$ resulta que $\delta_2 = 71,57^\circ$. Aplicando agora as equações (4.9) e (4.10) resulta que

$$z_{e1} = 16,86$$

$$z_{e2} = 151,83$$

4.5. RELAÇÕES GEOMÉTRICAS

Nesta secção são apresentadas as principais relações geométricas e proporções dos dentes para o caso das engrenagens cónicas. Para o efeito, considere-se a figura 4.17, relativa à representação esquemática de um engrenamento cónico, cujas velocidades de rotação são, respetivamente, ω_1 e ω_2 . Ainda nesta figura está representado o eixo instantâneo de rotação¹⁵, SI , da engrenagem, em que I denota o ponto primitivo exterior (Niemann, 1971; Henriot, 1979).

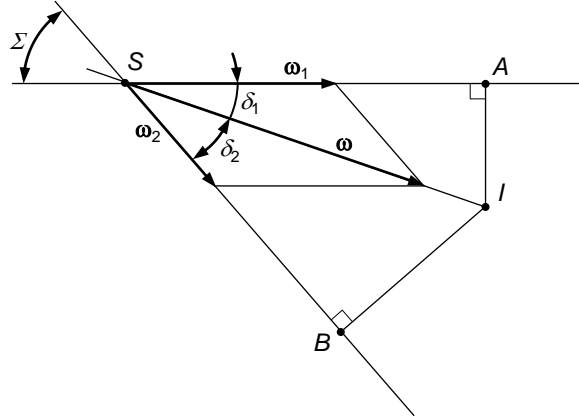


Figura 4.17 – Representação esquemática de um engrenamento cónico.

Por definição, a velocidade linear do ponto primitivo é dada por

$$v_1 = v_2 = \overline{IA}\omega_1 = \overline{IB}\omega_2 \quad (4.11)$$

ou seja

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = \frac{z_2}{z_1} \quad (4.12)$$

Atendendo a que

$$\overline{IA} = \overline{SI} \sin \delta_1 \quad (4.13)$$

$$\overline{IB} = \overline{SI} \sin \delta_2 \quad (4.14)$$

resulta que

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (4.15)$$

Da análise da equação (4.15) pode concluir-se que o estabelecimento dos ângulos primitivos, δ_1 e δ_2 , depende da relação de transmissão, sendo o ângulo de conicidade dado pela seguinte relação matemática

$$\Sigma = \delta_1 + \delta_2 \quad (4.16)$$

¹⁵ Quando um corpo roda no espaço tridimensional em relação a outro corpo, existe um eixo comum de rotação, cuja posição relativamente a ambos os corpos pode ou não variar de instante para instante. A estes eixos dá-se o nome de eixos instantâneos de rotação (Flores e Claro, 2007).

Com efeito, conhecidos os valores de Σ e de i podem facilmente calcular-se os ângulos primitivos δ_1 e δ_2 . Deve dizer-se que na maioria dos casos, as engrenagens cônicas apresentam um ângulo de conicidade de 90° (Henriot, 1979).

A velocidade instantânea de rotação do engrenamento representado na figura 4.17 é expressa do seguinte modo,

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm 2\omega_1\omega_2 \cos \Sigma} \quad (4.17)$$

em que os sinais (+) e (−) se referem a engrenagens exteriores e interiores, respetivamente (Henriot, 1979).

Conforme se trate de engrenagens exteriores ou interiores, o estabelecimento do valor do ângulo formado entre os eixos das rodas permite distinguir cinco posições relativas dos cones primitivos de duas rodas cônicas. A figura 4.18 ilustra esquematicamente estas cinco situações distintas.

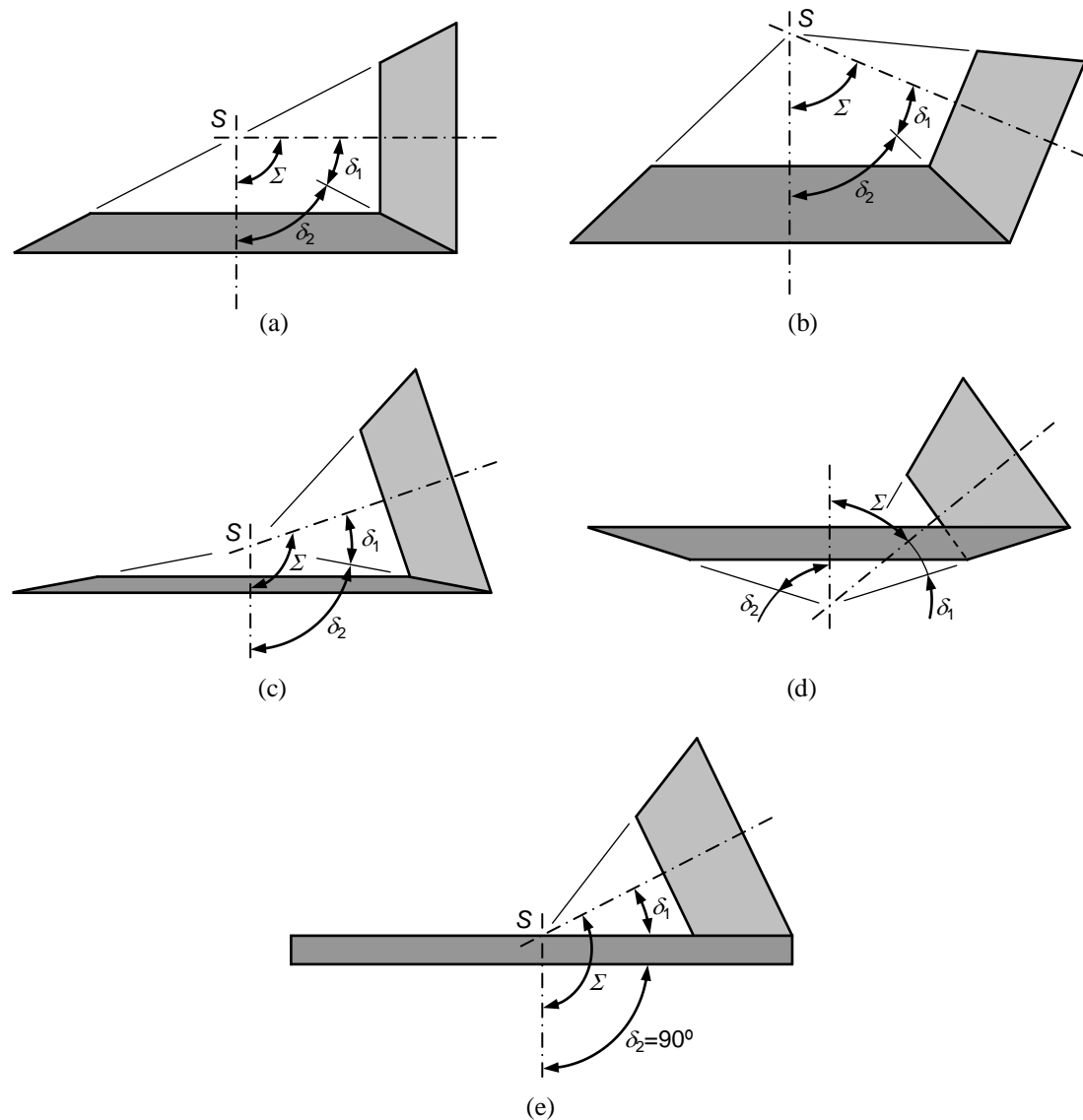


Figura 4.18 – Posições relativas dos cones primitivos em engrenagens cônicas: (a) Engrenagem exterior, $\Sigma=90^\circ$; (b) Engrenagem exterior, $\Sigma<90^\circ$; (c) Engrenagem exterior, $\Sigma>90^\circ$; (d) Engrenagem interior, $\Sigma<90^\circ$; (e) Engrenagem interior com roda plana, $\Sigma>90^\circ$.

Para engrenagens exteriores em que $\Sigma=90^\circ$ tem-se que

$$\delta_1 + \delta_2 = \Sigma \quad (4.18)$$

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{z_1}{z_2} \quad (4.19)$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{z_2}{z_1} \quad (4.20)$$

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\operatorname{sen} \delta_2}{\operatorname{sen} \delta_1} = \frac{\operatorname{sen}(90 - \delta_1)}{\operatorname{sen} \delta_1} = \operatorname{cotg} \delta_1 \quad (4.21)$$

Para engrenagens exteriores em que $\Sigma < 90^\circ$ tem-se que

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\operatorname{sen} \Sigma}{\frac{z_1}{z_2} + \cos \Sigma} \quad (4.22)$$

$$\delta_1 = \Sigma - \delta_2 \quad (4.23)$$

Para engrenagens exteriores em que $\Sigma > 90^\circ$ tem-se que

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\operatorname{sen}(180 - \Sigma)}{\frac{z_1}{z_2} - \cos(180 - \Sigma)} \quad (4.24)$$

$$\delta_1 = \Sigma - \delta_2 \quad (4.25)$$

Para engrenagens interiores em que $\Sigma < 90^\circ$ tem-se que

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\operatorname{sen} \Sigma}{\operatorname{sen} \Sigma - \frac{z_1}{z_2}} \quad (4.26)$$

$$\delta_1 = \delta_2 - \Sigma \quad (4.27)$$

Para engrenagens interiores em que $\Sigma > 90^\circ$, sendo a roda plana, tem-se que

$$\delta_2 = 90^\circ \quad (4.28)$$

$$\delta_1 = \Sigma - \delta_2 \quad (4.29)$$

Tal como foi referido anteriormente, nas engrenagens cónicas as proporções dos dentes são estabelecidas na extremidade exterior dos dentes sobre as circunferências primitivas (Henriot, 1979). Para dentes normais tem-se que

$$h_a = m \quad (\text{saliência}) \quad (4.30)$$

$$h_f = 1,25m \quad (\text{reentrância}) \quad (4.31)$$

$$\operatorname{tg} \nu_a = \frac{2 \operatorname{sen} \delta}{z} \quad (\text{ângulo de saliência}) \quad (4.32)$$

$$\operatorname{tg} \nu_f = \frac{2,5 \operatorname{sen} \delta}{z} \quad (\text{ângulo de reentrância}) \quad (4.33)$$

$$d_a = d \frac{\operatorname{sen}(\delta + \nu_a)}{\operatorname{sen} \delta \cos \nu_a} = d + 2h_a \cos \delta \quad (\text{diâmetro de cabeça}) \quad (4.34)$$

$$d_f = d \frac{\operatorname{sen}(\delta + \nu_f)}{\operatorname{sen} \delta \cos \nu_f} = d - 2h_f \cos \delta \quad (\text{diâmetro de pé}) \quad (4.35)$$

$$R = \frac{d}{2 \operatorname{sen} \delta} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \quad (\text{geratriz primitiva}) \quad (4.36)$$

$$R_m = R - \frac{b}{2} \quad (\text{geratriz média}) \quad (4.37)$$

É oportuno salientar-se que os valores do passo, módulo, espessura e intervalo se referem sempre à engrenagem cilíndrica equivalente (Flores e Gomes, 2014b). O ângulo de pressão real e outras grandezas desta natureza, no caso de dentes helicoidais, são definidos sobre a circunferência média da roda.

Exercício 4.2

Enunciado: Considere uma engrenagem cônica exterior de dentado reto, cujo valor do ângulo formado pelos eixos das rodas é igual a 70° . Atendendo a que a relação de transmissão é igual a 2, determine os valores dos ângulos primitivos das rodas (Wilson e Sadler, 1993).

Padrão de resposta esperado:

Da aplicação da equação (4.22) vem que

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\operatorname{sen} 70}{\frac{1}{2} + \cos 70} \Rightarrow \delta_2 = 48,2^\circ$$

Por seu lado, da aplicação da equação (4.23) resulta que

$$\delta_1 = \Sigma - \delta_2 = 70 - 48,2 \Rightarrow \delta_1 = 21,8^\circ$$

Exercício 4.3

Enunciado: Considere uma engrenagem cônica exterior de dentado reto, cujo ângulo entre os eixos das rodas é igual a 90° . Atendendo a que a relação de transmissão é igual a 3, o módulo é de 4 mm e que a roda tem 48 dentes, determine: (i) os diâmetros primitivos das rodas; (ii) os ângulos primitivos e (iii) a geratriz primitiva.

Padrão de resposta esperado:

Pela definição de relação de transmissão pode conhecer-se o número de dentes do pinhão, ou seja

$$i = \frac{z_2}{z_1} \Leftrightarrow 3 = \frac{48}{z_1} \Rightarrow z_1 = 16$$

Assim, da aplicação das equações (4.1) e (4.2) obtêm-se os diâmetros primitivos das rodas, isto é

$$d_1 = mz_1 = 4 \times 16 \Rightarrow d_1 = 64 \text{ mm}$$

$$d_2 = mz_2 = 4 \times 48 \Rightarrow d_2 = 192 \text{ mm}$$

Por seu lado, atendendo a que o ângulo de conicidade é de 90° , os ângulos primitivos das rodas podem ser calculados utilizando as equações (4.19) e (4.20), ou seja

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow \delta_1 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{16}{48} \Rightarrow \delta_1 = 18,43^\circ$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{z_2}{z_1} \Leftrightarrow \delta_2 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{48}{16} \Rightarrow \delta_2 = 71,57^\circ$$

Finalmente, a geratriz primitiva pode ser determinada recorrendo à equação (4.36), resultando que

$$R_1 = \frac{d_1}{2\operatorname{sen} \delta_1} = \frac{64}{2\operatorname{sen} 18,43} \Rightarrow R_1 = 101,2 \text{ mm}$$

$$R_2 = \frac{d_2}{2\operatorname{sen} \delta_2} = \frac{192}{2\operatorname{sen} 71,57} \Rightarrow R_2 = 101,2 \text{ mm}$$

Exercício 4.4

Enunciado: Para o enunciado do exercício 4.3, calcule as proporções dos dentes das duas rodas, os ângulos de saliência e de reentrância, bem como os diâmetros de coroa. Considere o dentado normalizado.

Padrão de resposta esperado:

As proporções dos dentes podem ser calculadas utilizando as equações (4.30) e (4.31), resultando que

$$h_a = m = 4 \text{ mm}$$

$$h_f = 1,25m = 5 \text{ mm}$$

$$h = 2,25m = 9 \text{ mm}$$

O ângulo de saliência ou de saída é dado pela equação (4.32), ou seja

$$\operatorname{tg} \nu_{a1} = \frac{2\operatorname{sen} \delta_1}{z_1} = \frac{2\operatorname{sen} 18,43}{16} \Rightarrow \nu_{a1} = 2,26^\circ$$

$$\operatorname{tg} \nu_{a2} = \frac{2\operatorname{sen} \delta_2}{z_2} = \frac{2\operatorname{sen} 71,57}{48} \Rightarrow \nu_{a2} = 2,26^\circ$$

O ângulo de reentrância ou de saída é dado pela equação (4.33), ou seja

$$\operatorname{tg} \nu_{f1} = \frac{2,5\operatorname{sen} \delta_1}{z_1} = \frac{2,5\operatorname{sen} 18,43}{16} \Rightarrow \nu_{f1} = 2,83^\circ$$

$$\operatorname{tg} \nu_{f2} = \frac{2,5\operatorname{sen} \delta_2}{z_2} = \frac{2,5\operatorname{sen} 71,57}{48} \Rightarrow \nu_{f2} = 2,83^\circ$$

Os diâmetros de coroa ou de cabeça podem ser determinados recorrendo à equação (4.34), ou seja

$$d_{a1} = d_1 \frac{\text{sen}(\delta_1 + \nu_{a1})}{\text{sen}\delta_1 \cos\nu_{a1}} = 64 \frac{\text{sen}(18,43 + 2,26)}{\text{sen}18,43 \cos 2,26} \Rightarrow d_{a1} = 71,6 \text{ mm}$$

$$d_{a2} = d_2 \frac{\text{sen}(\delta_2 + \nu_{a2})}{\text{sen}\delta_2 \cos\nu_{a2}} = 192 \frac{\text{sen}(71,57 + 2,26)}{\text{sen}71,57 \cos 2,26} \Rightarrow d_{a2} = 194,5 \text{ mm}$$

4.6. PARÂMETROS DE DESEMPENHO

O estudo dos parâmetros de desempenho das engrenagens cónicas de dentado reto ou inclinado é idêntico ao que foi apresentado para o caso das engrenagens cilíndricas correspondentes (Flores e Gomes, 2014b; Flores e Gomes, 2014c). Para o efeito é necessário, em primeiro lugar, determinar o número de dentes equivalente utilizando o método aproximado de Tredgold (Mabie e Reinholtz, 1987), ou seja

$$z_e = \frac{z}{\cos \delta} \quad (4.38)$$

em que z representa o número de dentes da roda cónica e δ denota o ângulo de cone primitivo. Tal como já foi referido anteriormente, o número de dentes equivalente é superior ao número de dentes real, pelo que as engrenagens cónicas apresentam um funcionamento mais suave do que as engrenagens cilíndricas com o mesmo número de dentes (Juvinal e Marshek, 2006; Budynas e Nisbett, 2011).

De entre os diversos parâmetros de desempenho, o estudo da continuidade do engrenamento é, sem dúvida, o que se revela de maior importância. Assim, para engrenagens cónicas de dentes retos, a relação de condução pode ser calculada do seguinte modo (Flores e Gomes, 2014b)

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi \cos \alpha} \left(\sqrt{\frac{z_{e2}^2}{4} \sin^2 \alpha + z_{e2} + 1} + \sqrt{\frac{z_{e1}^2}{4} \sin^2 \alpha + z_{e1} + 1} - \frac{z_{e1} + z_{e2}}{2} \sin \alpha \right) \quad (4.39)$$

em que α representa o ângulo de pressão, sendo o número de dentes equivalente dado pela equação (4.38). Esta análise é verdadeira, pois se se considerar uma vista perpendicular à linha do cone primitivo, o engrenamento das rodas cónicas é em tudo semelhante ao engrenamento de duas rodas cilíndricas de dentes retos (Niemann, 1971; Henriot, 1979; Wilson e Sadler, 1993).

Por seu lado, para engrenagens cónicas de dentes inclinados, a relação de condução é escrita da seguinte forma (Flores e Gomes, 2014c)

$$\varepsilon = \frac{l}{\pi m_t \cos \alpha_t} + \frac{btg \beta}{\pi m_t} \quad (4.40)$$

onde o primeiro termo do segundo membro desta equação é dado por

$$\frac{1}{\pi \cos \alpha_t} \left(\sqrt{\frac{z_{e2}^2}{4} \sin^2 \alpha_t + z_{e2} \cos \beta + \cos^2 \beta} + \sqrt{\frac{z_{e1}^2}{4} \sin^2 \alpha_t + z_{e1} \cos \beta + \cos^2 \beta} - \frac{z_{e1} + z_{e2}}{2} \sin \alpha_t \right) \quad (4.41)$$

em que α_t denota o ângulo de pressão aparente, β representa o ângulo de inclinação primitivo, sendo o número de dentes equivalente dado pela equação (4.38). Na equação (4.40), a variável b diz respeito à largura dos dentes.

Relembre-se que o ângulo de pressão real (α_n), o ângulo de pressão aparente (α_t) e o ângulo de inclinação da hélice primitiva (β) podem relacionar-se do seguinte modo (Flores e Gomes, 2014c)

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha_t \cos \beta \quad (4.42)$$

Por seu lado, o módulo real (m_n) e o módulo aparente (m_t) relacionam-se da seguinte forma (Flores e Gomes, 2014c)

$$m_n = m_t \cos \beta \quad (4.43)$$

Exercício 4.5

Enunciado: Considere uma engrenagem cônica de dentado reto normalizado em que o ângulo de conicidade é igual a 90° . Atendendo a que o módulo é de 3 mm, a relação de transmissão é igual a 2 e que o pinhão tem 20 dentes, determine a relação de condução deste par cinemático. Comente o resultado obtido.

Padrão de resposta esperado:

Em primeiro lugar, pela definição de relação de transmissão pode calcular-se o número de dentes da roda, ou seja

$$i = \frac{z_2}{z_1} \Leftrightarrow 2 = \frac{z_2}{20} \Rightarrow z_2 = 40$$

Atendendo a que o ângulo de conicidade é de 90° , os ângulos primitivos do pinhão e da roda podem ser calculados utilizando as equações (4.19) e (4.20), ou seja

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow \delta_1 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{20}{40} \Rightarrow \delta_1 = 26,57^\circ$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{z_2}{z_1} \Leftrightarrow \delta_2 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{40}{20} \Rightarrow \delta_2 = 63,43^\circ$$

Considerando agora a equação (4.38) pode conhecer-se o número de dentes equivalente do pinhão e da roda, ou seja

$$z_{e1} = \frac{z_1}{\cos \delta_1} = \frac{20}{\cos 26,57} \Rightarrow z_{e1} = 22,36$$

$$z_{e2} = \frac{z_2}{\cos \delta_2} = \frac{40}{\cos 63,43} \Rightarrow z_{e2} = 89,44$$

Atendendo a que o dentado é normalizado, isto é $\alpha=20^\circ$, então utilizando a equação (4.39) pode calcular-se a relação de condução, ou seja, $\varepsilon=1,71$. Observa-se que existe continuidade de engrenamento, uma vez que a relação de condução é superior aos valores recomendados (Flores e Gomes, 2014b).

Exercício 4.6

Enunciado: Considere que a engrenagem descrita no exercício 4.5 apresenta uma inclinação de dentes igual a 35° e uma largura de 10 mm para os dentes. Assim, estude a continuidade do engrenamento da referida engrenagem.

Padrão de resposta esperado:

Utilizando os dados apresentados na resolução do exercício 4.5, após a aplicação da equação (4.40) relativa à relação de condução de engrenagens com dentes helicoidais, resulta que a relação de condução total é de 1,89. Verifica-se, portanto, que a engrenagem cônica descrita apresenta boa continuidade de engrenamento.

No que diz respeito ao cálculo do rendimento nas engrenagens cônicas podem se consideradas as expressões apresentadas para os casos das engrenagens cilíndricas de dentes retos ou helicoidais uma vez obtidas as engrenagens equivalentes correspondentes utilizando para o efeito o traçado aproximado de Tredgold (Henriot, 1979).

Do mesmo modo, a temática das interferências de funcionamento pode ser analisada tendo em consideração as expressões relativas às engrenagens cilíndricas de dentado reto ou de dentado inclinado, desde que se substituam o valor de z_1 e z_2 pelos números de dentes equivalentes, recorrendo à equação (4.38) para este efeito. Assim, para o caso de dentados retos, o número mínimo de dentes que uma roda deve ter para se evitar interferências de funcionamento é dado por (Flores e Gomes, 2014b)

$$z_{e1} \geq -z_{e2} + \sqrt{z_{e2}^2 + \frac{4(z_{e2} + 1)}{\sin^2 \alpha}} \quad (4.44)$$

Introduzindo agora o número de dentes equivalentes na equação (4.44) resulta que

$$\frac{z_1}{\cos \delta_1} \geq -\frac{z_2}{\cos \delta_2} + \sqrt{\left(\frac{z_2}{\cos \delta_2}\right)^2 + \frac{4\left(\frac{z_2}{\cos \delta_2} + 1\right)}{\sin^2 \alpha}} \quad (4.45)$$

ou seja

$$z_1 \geq -z_2 \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2} + \sqrt{\left(z_2 \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2}\right)^2 + \frac{4 \cos \delta_1 (z_2 + 1) \cos \delta_1}{\sin^2 \alpha} \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2}} \quad (4.46)$$

Quando z_2 tende para infinito, a equação (4.46) pode ser simplificada do seguinte modo (Henriot, 1979)

$$z_1 \geq \frac{2 \cos \delta_1}{\sin^2 \alpha} \quad (4.47)$$

Finalmente, para o caso das engrenagens cônicas terem dentes inclinados deve proceder-se do mesmo modo, determinando o número de dentes da engrenagem cilíndrica equivalente e aplicam-se as mesmas expressões estabelecidas para as engrenagens cilíndricas de dentes inclinados (Flores e Gomes, 2014c).

4.7. HIPOIDES

Tal como no caso das engrenagens cilíndricas, nas engrenagens cónicas o dentado reto é bastante utilizado uma vez que o seu projeto e fabrico são relativamente simples de concretizar. A montagem das engrenagens cónicas de dentes retos deve ser bastante cuidada de modo a garantir o bom funcionamento (Branco *et al.*, 2009). Contudo, quando as velocidades de funcionamento são elevadas, as engrenagens cónicas de dentes retos são assaz ruidosas.

Com o intuito de obter engrenamentos mais suaves utilizam-se rodas cónicas com dentes curvos, tal como se ilustra na figura 4.19. O ângulo de pressão neste tipo de dentado é, em geral, o mesmo que se considera para o dentado reto, ou seja, $\alpha=20^\circ$. Por seu lado, o ângulo de espiral é normalmente igual a 35° . Quando o ângulo de espiral é nulo, o dentado denomina-se de dentado *zerol* (Wilson e Sadler, 1993).

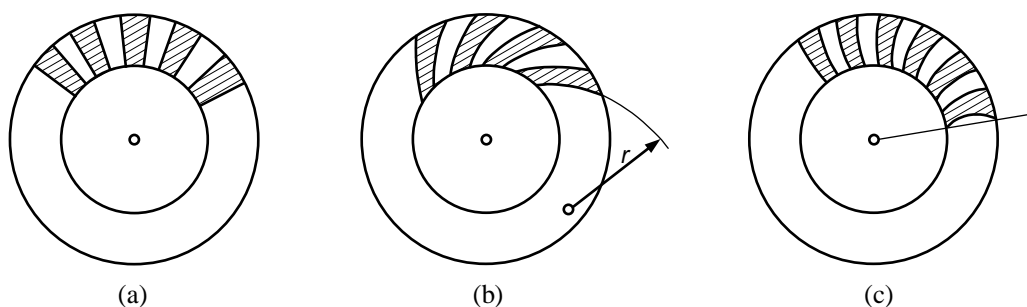


Figura 4.19 – Diferentes formas de dentes de rodas cónicas.

As rodas cónicas de dentes curvos possibilitam funcionamentos mais silenciosos, com velocidades e cargas elevadas. As transmissões com dentados curvos são mais suaves, uma vez que o próprio engrenamento é mais gradual, e proporcionam engrenamentos com maior número de dentes em contacto ao mesmo tempo, isto é, com maiores relações de condução (Wilson e Sadler, 1993).

Quando se torna necessário a utilização de rodas com eixos não concorrentes empregam-se engrenagens denominadas de hipoides¹⁶, tal como a que se representa na figura 4.20. As hipoides são engrenagens mais suaves que as engrenagens cónicas de dentes curvos e proporcionam maior capacidade de transmissão de carga. Na verdade, nas hipoides proporcionam um maior número de dentes em contacto ao mesmo tempo, tornando o engrenamento mais silencioso. Pode dizer-se que a passagem de dentados espirais para engrenagens hipoides é equivalente à passagem de dentados retos para dentados helicoidais. Como inconvenientes, as hipoides têm um funcionamento que combina rolamento com escorregamento. Quanto maior for o descentramento dos eixos das rodas, maior será o escorregamento entre as superfícies dos dentes. Como consequência, as hipoides apresentam rendimentos mais baixos devido ao escorregamento existente e requerem a utilização de lubrificantes adequados às cargas e temperaturas em jogo. Uma vez que as hipoides são soluções bastante compactas e possibilitam relações de transmissão¹⁷ elevadas, este tipo de engrenagens são utilizadas em diferenciais automóveis (Shigley e Uicker, 1980). O projeto de hipoides é, em geral, mais exigente do que os demais tipos de engrenagens cónicas (Henriot, 1979; Mabie e Reinholtz, 1987; Budynas e Nisbett, 2011).

¹⁶ Esta denominação decorre do facto das superfícies primitivas serem hiperboloides de revolução.

¹⁷ As hipoides podem apresentar relações de transmissão até 100:1 (Spotts e Shoup, 1998).



Figura 4.20 – Ilustração de uma engrenagem hipoide.

4.8. REVISÃO DE CONHECIMENTOS

Com o propósito de proporcionar uma revisão de conhecimentos sobre a temática das engrenagens cónicas, apresenta-se, nesta secção, um conjunto diversificado de questões e exercícios de aplicação.

1. Apresente quatro tipos de engrenagens cónicas.
2. Discuta as principais características das engrenagens cónicas.
3. Descreva as principais aplicações das engrenagens cónicas.
4. Liste algumas vantagens associadas às engrenagens descentradas.
5. Descreva sucintamente o processo de traçado de perfis de dentes para engrenagens cónicas.
6. Distinga perfil exato de perfil aproximado nas rodas cónicas.
7. Diga o que entende por roda coroa.
8. Defina ângulo de conicidade de uma engrenagem cónica.
9. Defina ângulo primitivo de uma roda cónica.
10. Para as engrenagens cónicas, diga em que zona das rodas se define o passo.
11. Diga em que consiste o traçado aproximado de Tredgold.
12. Qual a utilidade do traçado aproximado de Tredgold?
13. Diga como se pode obter o número de dentes formativo ou imaginário de uma roda cónica.
14. Diga o que entende por roda cilíndrica equivalente.
15. Represente graficamente uma roda cónica e a correspondente roda cilíndrica equivalente.
16. Diga como podem ser definidos os ângulos de conicidade em engrenagens cónicas.
17. Descreva as principais características das hipoides.
18. Considere uma engrenagem cónica de dentes helicoidais cujo ângulo de conicidade é igual a 90° . Atendendo a que a relação de transmissão é igual a 4, o ângulo de inclinação primitiva é igual a 30° e que o pinhão tem 15 dentes, determine o número de dentes equivalentes.

19. Considere que na engrenagem descrita no exercício 18 a largura dos dentes é igual a 30 mm. Assim, calcule a relação de condução da referida engrenagem. Comente o resultado obtido.
20. Considere uma engrenagem cônica de dentado reto normalizado em que o ângulo de conicidade é igual 90° . Atendendo a que o módulo é de 3 mm, a relação de transmissão é igual a 2 e que o pinhão tem 20 dentes, calcule a relação de condução deste engrenamento. Comente o resultado obtido.
21. Considere que a engrenagem descrita no exercício 20 apresenta uma inclinação de hélice dos dentes igual a 35° e os dentes têm uma largura de 5 mm. Assim, estude a continuidade do engrenamento desta engrenagem.
22. Uma engrenagem cônica de dentado reto normalizado apresenta um ângulo de conicidade de 120° . O módulo da engrenagem é igual a 3 mm. O pinhão e a roda têm 15 e 33 dentes, respectivamente. Assim, determine os ângulos primitivos das rodas desta engrenagem.
23. Para o engrenamento descrito no exercício 22 calcule as proporções dos dentes, bem como os diâmetros primitivos das rodas.
24. Considere uma engrenagem cônica exterior de dentado reto, cujo valor do ângulo formado pelos eixos das rodas é igual a 105° . Atendendo a que a relação de transmissão é igual a 2 e que o pinhão tem 20 dentes, calcule as proporções dos dentes, os diâmetros primitivos das rodas, bem como os ângulos de saliência e de reentrância.
25. Faça a representação gráfica da engrenagem caracterizada no exercício 24, indicando os parâmetros calculados.

4.9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Antunes, F. (2012) *Mecânica Aplicada - Uma abordagem prática*. Lidel.
- Branco, C.M., Ferreira, J.M., da Costa, J.D., Ribeiro, A.S. (2009) *Projecto de Órgãos de Máquinas*. 2ª Edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Budynas, R.G., Nisbett, J.K. (2011) *Elementos de Máquinas de Shigley*. 8ª edição McGraw-Hill, Brasil.
- Crosher, W.P. (2014) *A Gear Chronology: Significant Events and Dates Affecting Gear Development*. Xlibris Corporation, London.
- Drago, R.J. (1988) *Fundamentals of Gear Design*. London, Butterworths.
- Flores, P., Claro, J.C.P. (2007) *Cinemática de Mecanismos*. Edições Almedina, Coimbra.
- Flores, P., Gomes, J. (2014a) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 1. Aspectos gerais sobre engrenagens*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 41p.
- Flores, P., Gomes, J. (2014b) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 2. Engrenagens cilíndricas de dentes retos*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 44p.
- Flores, P., Gomes, J. (2014c) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 3. Engrenagens cilíndricas de dentes inclinados*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 32p.
- Hamrock, B.J., Schmid, S.R., Jacobson, B. (2005) *Fundamentals of Machine Elements*. 2nd Edition, McGraw-Hill, New York.
- Henriot, G. (1979) *Traité Théorique et Pratique des Engrenages*. Editora Dunod.
- Juvinall, R.C., Marshek, K.M. (2006) *Fundamentals of Machine Component Design*. John Wiley and Sons, New York.
- Mabie, H.H., Reinholtz, C.F. (1987) *Mechanisms and Dynamics of Machinery*. Fourth Edition, John Wiley and Son, New York.
- Niemann, G. (1971) *Elementos de Máquinas*. Volume II, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, Brasil.
- Norton, R.L. (2013) *Machine Design*. Pearson Education, New York.
- Paz, A. (2011) *Manual do Automóvel*. 2ª Edição. Hemus, São Paulo.
- Shigley, J.E., Mischke, C.R. (1989) *Mechanical Engineering Design*. 5th Edition, McGraw-Hill, New York.
- Shigley, J.E., Uicker, J.J. (1980) *Theory of Machines and Mechanisms*. McGraw-Hill, New York.
- Spotts, M.F., Shoup, T.E. (1998) *Design of Machine Elements*. 7th Edition Prentice-Hall, New Jersey.
- Wang, Y., Yang, Z., Li, L., Zhang, X. (2011) The equation of meshing of spiral bevel gears manufactured by generating-line method. *The Open Mechanical Engineering Journal*, 5, 51-55.
- Wilson, C.E., Sadler, J.P. (1993) *Kinematics and Dynamics of Machinery*. 2nd Edition, Harper Collins College Publishers, New York.